考研常用公式

初等数学部分

1. 一元二次函数

1.1. 定义

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

叫做一元二次函数

1.2. 性质

(1) 函数的图像是一条抛物线，抛物线顶点的坐标是$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ab-b^2}{4a}\right)$，抛物线的对称轴是直线$x = -\dfrac{b}{2a}$.

(2) 当$a > 0$时，抛物线开口向上，函数在$x = -\dfrac{b}{2a}$处取最小值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

当$a < 0$时，抛物线开口向下，函数在$x = -\dfrac{b}{2a}$处取最大值$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(3) 当$a > 0$时，一元二次函数在区间$\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$上是减函数，在$\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$上是增函数；

当$a < 0$时，医院二次函数在区间$\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$上是增函数，在$\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$上是减函数；

1.3. 一元二次方程（$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$）

(1) 判别式$\Delta = b^2 - 4ac$:

若$\Delta > 0$，则方程有两个不相等的实数根；

若$\Delta = 0$，则方程有两个相等的实数根；

若$\Delta < 0$，则方程无实数根；

(2) 一元二次方程的根

①因式分解；

②求根公式 $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. 乘法公式

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. $(a+b)^3 = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$

4. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

5. $a^3 \pm b^3 = (a+b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$

6. $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$

3. 阶乘与双阶乘

① $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$，规定$0! = 1$.

② $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n) = 2^n \cdot n!$. (双阶乘[1])

③ $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$.

4. 指数运算

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^m = a^m b^m$

(4) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(5) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, a > 0$

(6) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0$

5. 对数运算

(1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

[1] 正整数的双阶乘表示不超过这个正整数且与它有相同奇偶性的所有正整数乘积

(3) $\log_a M^b = b\log_a M$

(4) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

(5) $N = \log_a a^N = a^{\log_a N}$，特别的当$a = e$时，$N = \ln e^N = e^{\ln N}$

6. 数列

6.1. 等差数列

首项为a_1，公差为$d(d \neq 0)$的数列 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \cdots, a_1 + (n-1)d, \cdots$.

① 通项公式$a_n = a_1 + (n-1)d$

② 前n项的和$S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

6.2. 等比数列

首项为a_1，公比为$r(r \neq 0)$的数列 $a_1, a_1 r, a_1 r^2, \cdots, a_1 r^{n-1}, \cdots$.

① 通项公式 $a_n = a_1 r^{n-1}$.

② 前n项的和 $S_n = \begin{cases} na_1, & r = 1, \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$

③ 常用 $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}(r \neq 1)$.

6.3. 一些常见数列前n项的和.

① $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

③ $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

7. 三角函数

7.1. 三角函数基本关系

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha.$$

7.2. 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限[2]（任一角度均可表示为$\frac{k\pi}{2}+\alpha, k\in\mathbf{Z}, |\alpha|<\frac{\pi}{4}$，根据$k$的奇偶性）

7.3. 重要公式

7.3.1. 倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

7.3.2. 半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

7.3.3. 和差公式

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

7.3.4. 积化和差与和差化积公式

(i) 积化和差公式

[2] 一全正，二正弦，三正切，四余弦

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

(i) 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

7.3.5. 万能公式

若$u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$，则$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

8. 常用不等式

(1) 设a,b为实数，则① $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$;② $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|$.

[注 : 可以将上述不等式①推广为]

离散情况：设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为实数，则

$|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

连续情况：设$f(x)$在$[a,b](a<b)$上可积，则

$|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

(2) ① $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a,b>0)$;

② $\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ (a,b,c>0)$.

(3) 设$a > b > 0$，则$\begin{cases} \text{当 } n > 0 \text{ 时，} & a^n > b^n, \\ \text{当 } n < 0 \text{ 时，} & a^n < b^n. \end{cases}$

(4) 若$0 < a < x < b, 0 < c < y < d$，则$\dfrac{c}{b} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{d}{a}$.

(5) $\sin x < x < \tan x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(6) $\sin x < x \ (x > 0)$

(7) $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

(8) $e^x \geqslant x + 1 \ (\forall x)$

(9) $x - 1 \geqslant \ln x \ (x > 0)$.

(10) $\dfrac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x} \ (x > 0)$.

9. 计数原理

9.1. 加法原理

做一件事，完成它有n类办法，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第二类办法中有m_2种不同的方法，…… 在第n类办法中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

9.2. 乘法原理

做一件事，完成它需要分成n个步骤，做第一步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2种不同的方法，…… 做第n步有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 m_2 \cdots m_n$种不同的方法.

9.3. 排列与排列数

(1) 定义

从n不同的元素中，任取m个元素（$m \leqslant n$），按照一定的顺序排成一列，称为从n个元素中取出m个元素的一个排列，所以有这些排列的个数，称为排列数，记为P_n^m.

当$m = n$时，即n个不同元素全部取出的排列数，称为全排列，记为P_n^n.

(2) 排列数公式

$$P_n^0 = 1$$
$$P_n^n = P_n^{n-1} = n!$$
$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

9.4. 组合与组合数

(1) 定义

从n个不同元素中，任取m个元素（$m \leqslant n$），不论顺序组成一组，称为从n个不同元素中取出m个元素的一个组合，所有这些组合的个数，称为组合数，记为C_n^m.

(2) 组合数公式

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$
$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

9.5. 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^ra^{n-r}b^r + \cdots + C_n^nb^n$$

$$(a+b)^n = C_n^0b^n + C_n^1b^{n-1}a + C_n^2b^{n-2}a^2 + \cdots + C_n^rb^{n-r}a^r + \cdots + C_n^na^n$$

这个公式表示的定理叫二项式定理，右边的多项式叫$(a+b)^n$的二项展开式，它有$n+1$项，各项的系数C_n^r叫二项式系数. $C_n^ra^{n-r}b^r$叫二项展开式的通项，用T_n表示，即通项$T_n = C_n^ra^{n-r}b^r$.

10. 平面几何

10.1. 平面图形

10.1.1. 三角形

设三角形的底为a，高为h，则$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac\sin\angle B = \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \frac{1}{2}bc\sin\angle A$.

10.1.2. 平行四边形

若平行四边形两边长分别为a, b，以b为底的高为h，则面积$S = bh$，周长$C = 2(a+b)$.

10.1.3. 矩形

设矩形两边长为a, b，则面积$S = ab$，周长$C = 2(a+b)$，对角线长$l = \sqrt{a^2+b^2}$.

10.1.4. 梯形

设梯形的上底为a，下底为b，高为h，面积$S=\frac{1}{2}(a+b)h$.

10.1.5. 圆

若圆的半径是r，则面积$S=\pi r^2$，周长$C=2\pi r$.

10.1.6. 扇形

设θ为扇形角的弧度数，r为扇形半径，则弧长$l=\theta r$，扇形面积$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\theta r^2$.

10.2. 空间几何体

10.2.1. 长方体

设长方体的三条棱长分别是a,b,c，

1. 长方体的表面积$S=2(ab+ac+bc)$.
2. 长方形的体积$V=abc=S_1h$，其中S_1为长方体的底面积.

10.2.2. 圆柱

设圆柱的高为h，地面半径为r，则:

1. 圆柱体的侧面积$S=2\pi rh$.
2. 圆柱体的体积$V=\pi r^2h$.

10.2.3. 球体

设球的半径为r，则:

1. 球的表面积$S=4\pi r^2$.
2. 球的体积$S=\frac{4}{3}\pi r^3$.

11. 平面解析几何

11.1. 关于点的公式

11.1.1. 两点距离公式

$$\text{两点}A(x_1,y_1)\text{与}B(x_2,y_2)\text{之间的距离}d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

11.1.2. 中点坐标公式

$$\text{两点}A(x_1,y_1)\text{与}B(x_2,y_2)\text{的中点坐标为}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

11.1.3. 两点斜率公式

$$\text{过}A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)\text{两个点直线的斜率}k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$$

11.1.4. 点到直线距离公式

$$\text{点}(x_0, y_0)\text{到直线}Ax + By + C = 0\text{的距离}d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

11.2. 直线方程

11.2.1. 一般式

$$Ax + By + C = 0\ (A, B\text{不全为零}),\ B \neq 0\text{时},\ k = -\frac{A}{B};\ B = 0\text{时},\ \text{斜率}k\text{不存在}$$

11.2.2. 点斜式

过点$P(x_0, y_0)$，斜率为k的直线方程为$y - y_0 = k(x - x_0)$.

11.3. 两条直线的位置关系

设不重合的两条直线为

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

11.3.1. 两条直线相交

若$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$，则l_1与l_2相交，方程组$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$有唯一实数解$(x_0, y_0)$就是$l_1$与$l_2$的交点.

11.3.2. 两条直线平行

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$$

若l_1与l_2的斜率均存在，分别为k_1与k_2，则

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

11.3.3. 两条直线垂直

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

若l_1与l_2的斜率均存在，分别为k_1与k_2，则

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$$

11.4. 圆的方程

11.4.1. 圆的标准方程

当圆心为$C(x_0, y_0)$，半径为r时，圆的标准方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

特别地，当圆心在原点$(0, 0)$时，圆的标准方程为$x^2 + y^2 = r^2$.

11.4.2. 圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\left(D^2+E^2-4F>0\right),$$

配方可得圆心坐标为$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$，半径为$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

11.5. 直线与圆的位置关系

直线$l:y=kx+b$，圆$o:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，$d$为圆心$(x_0,y_0)$到直线$l$的距离，又设
方程组,

$$\begin{cases} y=kx+b \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases} \tag{1}$$

1. 直线与圆相交 $\Leftrightarrow d<r \Leftrightarrow$ 方程组(1)有两不等的实根;
2. 直线与圆相交 $\Leftrightarrow d=r \Leftrightarrow$ 方程组(1)有两相等的实根;
3. 直线与圆相离 $\Leftrightarrow d>r \Leftrightarrow$ 方程组(1)无实根;

11.6. 椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{或}\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

11.7. 双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\text{或}\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

11.8. 抛物线的标准方程

$$y^2=\pm 2px,\ x^2=\pm 2py.$$